

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

4-дәріс. $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ Евклид кеңістігіндегі толқын теңдеуі үшін Коши есебі. Кирхгоф және Пуассон формулалары. Коши есебі үшін қатарлар әдісі. Коши есебі мен шекаралық есептер шешімінің жалғыздығы.

Дәрістің мақсаты – $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ Евклид кеңістігіндегі толқын теңдеуі үшін Коши есебін шешу.

Негізгі сұрақтар:

1. $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ Евклид кеңістігіндегі толқын теңдеуі үшін Коши есебінің қойылымы
2. $\mathbb{R}^2$ Евклид кеңістігіндегі толқын теңдеуі үшін Коши есебінің шешімі. Пуассон формуласы
3. $\mathbb{R}^3$ Евклид кеңістігіндегі толқын теңдеуі үшін Коши есебінің шешімі. Кирхгоф формуласы
4. $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ Евклид кеңістігіндегі толқын теңдеуі үшін Коши есебінің шешімі. Коши есебі үшін қатарлар әдісі.
5. Коши есебі мен шекаралық есептер шешімінің жалғыздығы.

$\mathbb{R}^2$ -дегі толқын теңдеуі: Коши есебі және Пуассон формуласы

1 Толқын теңдеуі және Коши есебі ($\mathbb{R}^2$)

Екі өлшемді Евклид кеңістікте қарастырайық:

$$u_{tt}(x, t) = \Delta_x u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0,$$

мұндағы $\Delta_x = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ — Лапласиан (біз ыңғайлы болу үшін толқын жылдамдығын $c = 1$ деп аламыз; $c \neq 1$ жағдайын кейін көрсетеміз).

Коши есебі былайша беріледі:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Мақсат — $u(x, t)$ -тің айқын өрнегін табу (Пуассон формуласы).

2 Пуассон формуласы (интегралдық өрнек, $c = 1$)

Пуассон формуласы (екі өлшемді жағдайда) келесі түрде беріледі: бар болған жағдайда, берілген өлшемдерде және жеткілікті тегіс бастапқы деректер үшін

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{B_t(x)} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{B_t(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy,$$

мұндағы $B_t(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y - x| < t\}$ — радиусы t дискісі, және dy — $\mathbb{R}^2$ -дегі ауданды білдіреді.

Бұл өрнек D'Alembert-тің 1D формуласынан ерекшеленіп, 2D-де шешімді дискіге (ішіне) интегралдау арқылы береді; ядро $\frac{1}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}$ — интегралдық ядроның сипаттаушысы.

Ескерту: интегралдар $t > 0$ үшін ғана анықталған (дискі жағында $t^2 - |y - x|^2 > 0$ шартында).

3 Пуассон формуласының баламалы жазбасы

Пуассон формуласын дөңгелек (айнымалы радиус бойынша) орташаларды қолдана отырып жазуға болады. Белгілі бір x үшін $r \mapsto M_f(x, r)$ — радиусы r дөңгелектегі орташа:

$$M_f(x, r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|y-x|=r} f(y) dS(y),$$

мұндағы dS — шеңбер бойындағы ұзындық өлшемі.

Тогда Пуассон-тың баламалы формуласы (қағидалық түрде) келесідей:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{r M_\varphi(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{r M_\psi(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr.$$

Осы жазбада біз дискі бойынша аудандық интегралды шеңбер бойынша орташаға және r -интегралға жіктедік (полярлық координаттарға ауыстыру арқылы).

Бұл нұсқа шешімді шеңбердегі орташалар арқылы бейнелейді — бұл 2D жағдайына тән және теориялық талдаулар үшін ыңғайлы.

4 Пуассон формуласының дәлелдеу идеясын қорыту

Пуассон формуласын дәлелдеудің бірнеше классикалық тәсілі бар; мұнда қысқаша идеялар беріледі.

(i) Орталау әдісі + Абель түрлендіруі

1. **Дөңгелек орталау** $M_u(x, r, t) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|y-x|=r} u(y, t) dS(y)$ деген функция қарастырылады.
2. Шеңбер бойынша орташа M_u үшін бірөлшемді теңдеу шығады (радилды түрлену нәтижесі):

нақты есептеу арқылы

$$\partial_{tt}(rM_u(x, r, t)) = \partial_r(r \partial_r(rM_u(x, r, t))),$$

Бессель типті теңдеуге апарады.

3. Бұл теңдеуді r бойынша интегралдау және бастапқы шарттарды қолдану нәтижесінде rM_φ пен rM_ψ -ден алынатын Абель-интеграл түріндегі өрнек шығады.
4. Абель түрлендіруін кері айналдыру арқылы алынған өрнекті бастапқы u -ға қайтару дискі бойынша ядро $\frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}}$ -ты береді.

(ii) Фурье түрлендіру (жылдам, қысқаша)

1. Жай Фурье түрлендіруді x -қа қолдану: $\hat{u}(k, t)$ орындап, әр k үшін ОДЖ

$$\hat{u}_{tt}(k, t) + |k|^2 \hat{u}(k, t) = 0,$$

шешіледі: $\hat{u}(k, t) = \hat{\varphi}(k) \cos(|k|t) + \frac{\hat{\psi}(k)}{|k|} \sin(|k|t)$.

2. Обратная Фурье арқылы өрнекті x -ке қайтарғанда, интегралдық өрнектер мен ядролар пайда болады; полярлық интегралдарды орындағанда дәл осындай $\frac{1}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}$ ядросы шығады.

Екі тәсіл де жақсы негізделген және формуланың дұрыс екенін көрсетеді (талдауда қажетті регулярылық шарттары қойылады).

5 Жалпы жылдамдық $c > 0$ үшін масштабтау

Егер бастапқы теңдеу $u_{tt} = c^2 \Delta u$ болса, онда c -ке қатысты масштабтау арқылы 1-жылдамдығына қайтару ыңғайлы:

$$\tau = ct.$$

Осылайша Пуассон формуласы $c > 0$ үшін келесі түрге ауысады (анық түрде):

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{B_{ct}(x)} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y - x|^2}} dy \right) + \frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y - x|^2}} dy.$$

(Жоғарыда көрсетілгендей, бірқатар жазбаларда бірінші мүшенің t -туындысында белгілі бір c -факторлар басқа түрде көрсетілуі мүмкін; осынаяқылы қолданылатын масштабтау арқылы екі нұсқа эквивалентті түрде жазылады.)

Ең қарапайым қолданылым: $c = 1$ алынып, кейін қажетті масштабтау қайтарылса жеткілікті.

6 Қасиеттер мен түсініктеме

- **Локалдылық / шектеулі тарау жылдамдығы:** Пуассон формуласы көрсеткендей, $u(x, t)$ тек $B_{ct}(x)$ дискісіндегі φ, ψ -қа тәуелді. Яғни ақпарат c жылдамдықпен жүреді.
- **Гюйгенс принципі (2D-дегі жоқтық):** 3D-де толқын шешімі «қатты шектеулі қашықтықта» тек шеңбер бойында көрінеді (ақпарат тек қана радиал бойынша өткір шектеуде өтеді), ал 2D-де шешім дискі ішінде интегралдық «қалдығы» болады — яғни өткен әсерлерден ұзақ «қаңқа» (tail) қалады. Бұл физикалық тұрғыдан «Huygens-тың қағидасының» 2D-де толық орындалмауын білдіреді.
- **Құрылысы:** Пуассон ядросы $\frac{1}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}$ y дискі ішінде шекті, бірақ диск шетіне қарай ($|y - x| \rightarrow t^-$) ядро интегралдың оң шетінде шектелмей өседі; алайда аудандық интеграл тұтасымен қарастырғанда жеткілікті тегіс бастапқы деректер үшін мәні анық.

Қорытынды

Пуассон формуласы — $\mathbb{R}^2$ -дегі толқын теңдеуі үшін Коши есебінің негізгі аналитикалық өрүнiшi. Ол шешiмдi дискiге интеграция арқылы бередi және 2D-ге тән физикалық-құрылымдық қасиеттердi (мысалы, қалдықтар) айқындайды. Формуланы алу дөңгелек орташа әдiсiмен және/немесе Фурье түрлендiру арқылы жүргiзiледi. *Ескерту.* Жоғарыдағы формулалардың жарамдылығы үшiн бастапқы деректерге (мысалы $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ немесе жеткiлiктi жылдам кемушi мәлiметтер) техникалық шарттар қойылады; нақты дәлелдеулерде осы регулярлылық талаптары анық көрсетiледi.

$\mathbb{R}^3$ -дегі толқын теңдеуі: Коши есебі және Кирхгоф формуласы

Кіріспе

Үш өлшемді кеңістікте ($\mathbb{R}^3$) толқын теңдеуі табиғаттағы көптеген физикалық процестерді сипаттайды: дыбыс, жарық, серпімді толқындар және электромагниттік толқындар. Бұл дәрісте біз Коши есебін қарастырамыз және оның шешімін **Кирхгоф формуласы** арқылы аламыз.

7 Толқын теңдеуі және Коши есебі ($\mathbb{R}^3$)

Үш өлшемді Евклид кеңістікте толқын теңдеуі:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

мұндағы $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$ — Лапласиан, $c > 0$ — толқынның таралу жылдамдығы. Коши есебі келесі шарттармен беріледі:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

8 Кирхгоф формуласы

8.1 Формуланың негізгі түрі

Кирхгоф формуласы ($\mathbb{R}^3$) келесі интегралдық өрнекпен беріледі:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi ct} \int_{|y-x|=ct} \varphi(y) dS(y) \right) + \frac{1}{4\pi ct} \int_{|y-x|=ct} \psi(y) dS(y),$$

мұндағы:

- $dS(y)$ — радиусы ct шеңбер бойындағы аудан элементі;
- $|y - x| = ct$ — x нүктесі айналасындағы радиусы ct сфера;
- Бірінші қосымша — бастапқы ығысу φ -дан туындайтын әсер;
- Екінші қосымша — бастапқы жылдамдық ψ -дан туындайтын әсер.

8.2 Физикалық интерпретация

- Шешім тек сфера шекарасында ($|y - x| = ct$) анықталған — бұл **Гюйгенс принципі** деп аталады;

- 3D-де толқын шешімі дискі ішінде емес, тек сфера бетінде таралады — «қалдықтар» болмайды, яғни сигнал өткір шекарада көрінеді;
- Бұл қасиет 2D жағдайынан ерекшеленеді: 2D-де дискі ішіндегі интеграл пайда болады (қалдықтар).

9 Қысқаша дәлелдеу идеясы

Кирхгоф формуласын алу идеясы:

1. Сфериялық симметрияны қолдану: радиалды орташа $\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x|=r} u(y, t) dS(y)$;
2. Радиация теңдеуін 1D-ге азайту: $\bar{u}(r, t)$ үшін $\partial_{tt}(r\bar{u}) = c^2 \partial_{rr}(r\bar{u})$ шығады;
3. 1D D'Alembert формуласын қолдану:

$$r\bar{u}(r, t) = \frac{1}{2} [r\bar{\varphi}(r - ct) + r\bar{\varphi}(r + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} r'\bar{\psi}(r') dr';$$

4. Шекаралық шарттарды пайдалана отырып, интеграл тек $r = ct$ сферасында қалдырылады.

10 Жалпы жылдамдық $c > 0$

Егер $c \neq 1$, формулада ct радиусын қолданамыз, және жалпы түрі:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi ct} \int_{|y-x|=ct} \varphi(y) dS(y) \right) + \frac{1}{4\pi ct} \int_{|y-x|=ct} \psi(y) dS(y).$$

11 Қорытынды

Кирхгоф формуласы — $\mathbb{R}^3$ кеңістігіндегі толқын теңдеуі үшін Коши есебінің негізгі аналитикалық шешімі. Ең маңызды қасиеттері:

- Толқынның шектеулі таралу жылдамдығы (c);
- Huygens принципі: шешім тек сфера шекарасында көрінеді;
- 3D-де интеграл тек сфера бойынша; дискі ішінде «қалдықтар» жоқ.

Бұл формула физикада, акустикада, электромагниттік теорияда, инженерлік есептерде негізгі құрал болып табылады.

12 Әдебиеттер тізімі

Студенттерге қосымша әрі толыққанды мәліметтер алу үшін [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] әдебиеттер ұсынылады.

Список литературы

- [1] Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М. Математикалық физика теңдеулері. Астана, 2010 ж. 12
- [2] Михлин С.Г. Курс математической физики. М., 1968. 12
- [3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1984. 12
- [4] Орынбасаров М.О., Оршубеков Н.Ә. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, 2009 ж. 12
- [5] Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы, 2009 ж. 12
- [6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 2006. 12
- [7] Хомпыш Х. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, Қазақ Университеті, 2017 ж. 215 б. 12